4次対称群をGalois群にもつGalois被覆を巡って

AUTHOR(S):
徳永, 浩雄

代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.39-49

4次対称群を Galois 群にもつ Galois 被覆を巡って

徳永浩雄[1]

イントロダクション

X, Y は正規射影多様体[2]とする．X から Y への有限全射 $\pi : X \to Y$ が存在するとき，X を Y の被覆という．$\mathbb{C}(X)$, $\mathbb{C}(Y)$ で各々の有理函数体をあらわすものとする．X が Y の被覆であるというとき，$\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}(Y)$ の代数拡大であり，その拡大次数は $\deg \pi$ に等しい．

Definition 0.1 G は有限群，$\pi : X \to Y$ は被覆とする．体の拡大 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ が Galois 拡大となるとき，X を Y の Galois 被覆と呼ぶ．さらに，Galois 群が G に同型であるとき，X を単に G-被覆と呼ぶ．

G-被覆は前もって与えられた不変量をもつ代数多様体の構成（例えば，一般型代数曲面の geography．この場合は G は可換群，特に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が多く用いられている），平面代数曲線の補空間のトポロジー（Alexander 多項式と関連する巡回被覆，2 面体被覆をもちいた Zariski ペアの構成等）など，様々なところで用いられ，また有用である．これらは，その構成法が確立された G-被覆の応用といえる．この報告ではこれらの応用というより，もっと基本的な構成法に関連した問題について述べる．G-被覆の構成に関しては以下の 2 つのアプローチが考えられる：

(1) G の作用する多様体 X を構成し，その作用による商 X/G を Y とおいて，G-被覆 $\pi : X \to Y$ を構成する．

(2) Y と Y の部分集合 B が与えられ，高々B でのみ分岐するように G-被覆を構成する．

ここでは前者を "top-to-bottom" な construction，後者を "bottom-to-top" な construction と呼ぶ．本稿においてこだわりたいのは bottom-to-top construction の方である[3]．構成問題に関するこの問題設定は数論における Galois の逆問題におけるそれとよく似ている．

Galois の逆問題とは，古典的には「有限群 G が与えられたとき，G は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大の Galois 群となりうるか？」という問題である．この問題に関し，

(i) その存在をなんらかの方法で証明する (conceptual),

---

[1]東京都立大学大学院理学研究科

[2]この稿を通して，代数多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする．

[3]G-被覆の応用面を見込んだ場合はこちらがより大切かと思われるが... もっとも，これは筆者の思い込みである

(ii) Galois 拡大を与える $\mathbb{Q}$ 上の多項式を explicit に与えて，拡大体を具体的に記述する (constructive),

という2通りのアプローチがある．後者の constructive なアプローチは G-被覆の bottom-to-top な構成問題と相通ずるものがある．constructive な Galois の逆問題の研究では近年（大雑把に云って）“G-拡大のすべてをパラメトライズする” generic polynomial, versal polynomial と呼ばれる対象がよく研究されている（例えば [2] の文献を参照されたい）．この報告では

1. versal polynomial の幾何学的アナロジーである versal G-被覆というものを定義した後，その最小次元として G の essential dimension と呼ばれる概念を紹介し，

2. G が 4 次対称群の際には [12] で与えた S_4-被覆の構成法とある種の有理楕円曲面を用いて，2 次元の versal S_4-被覆が explicit に構成できること，

についえ述べる．まず，versal G-被覆の定義から始めよう．その定義は以下の通りである[4]．

Definition 0.2 G-被覆 $\varpi : X \to M$ が以下の条件を満たすとき，versal であるという：

任意の G-被覆 $\varpi : Y \to Z$ に対し，以下の条件を満たす有理写像 $\nu : Z \cdots \to M$ と Z の Zariski 開集合 U が存在する：

(i) $\nu|_U : Z \cdots \to M$ は射,
(ii) $\pi^{-1}(U)$ は U 上 $U \times_M X$ に双有理同値.

versal G-被覆は Buhler-Reichstein により導入された versal G-多項式から得られる Galois 拡大に対応する G-被覆と考えることができる．versal G-被覆は任意の有限群 G に対し存在することが知られている.（例えば，[1]，[7]，[8]，[13] 参照）．本報告の主結果は次の定理である.

Theorem 0.1 §3 で構成する 2 つの S_4-被覆 $\pi_{431} : S_{431} \to \Sigma_{431}$，$\pi_{9111} : S_{9111} \to \Sigma_{9111}$ はともに versal である.

この報告では上記の 2 つの被覆をどのようにして構成するかというところまでにとどめる．versality に関する証明は [13] を参照されたい.

なお，versal G-被覆を具体的な構成に関しては，ここで述べているもの以外にも [15] がある.

[4] versal G-被覆が代数多様体の構成や，開代数多様体の研究にどれ程役立ちそうかという点は今のところ未知数である．ただ，定義しただけで終わってしまうか，それとも，面白く展開していくかは今後の（筆者の）努力次第？

1 S_4-被覆の構成法

ここでは [12] で与えた S_4-被覆の構成法について紹介する．証明等，くわしくは [12] を参照されたい．

被覆 $\pi : X \to Y$ に対し，その分岐集合を Δ_π または $\Delta(X/Y)$ で表す．また，$V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で Klein 群，すなわち

$$\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

で表す．$\pi : X \to Y$ は S_4-被覆とする．$\mathbb{C}(X)^{V_4}$ は V_4 による $\mathbb{C}(X)$ の不変体とし，$D(X/Y, V_4)$ は Y の $\mathbb{C}(X)^{V_4}$-正規化を表すものとする．X，$D(X/Y, V_4)$，Y の間に自然にさだまる被覆写像をそれぞれ，

$$\beta_1(\pi, V_4) : D(X/Y, V_4) \to Y, \qquad \beta_2(\pi, V_4) : X \to D(X/Y, V_4)$$

とおく．$\beta_2(\pi, V_4)$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$-被覆であり，$\beta_1(\pi, V_4)$ は S_3-被覆である（S_3 は 3 次対称群を表す）．これらの設定のもと，S_4-被覆の構成法に関して，つぎの命題が成立する：

Propostition 1.1 $f : Z \to Y$ は Y の S_3-被覆とする．Z が非特異で Z 上の相異なる 3 つの被約因子 D_1，D_2，D_3 で以下の条件を満たすものが存在するとする：

(*i*) D_1，D_2，D_3 には共通の既約因子がなく，3 次対称群を $\mathrm{Gal}(Z/Y) = S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^3 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$ と表すと $(i-a)$ $D_1^\sigma = D_2$ ，$D_3^\sigma = D_3$，かつ $(i-b)$ $D_1^\tau = D_2$，$D_2^\tau = D_3$，$D_3^\tau = D_1$ である（ただし，D^σ 及び D^τ は σ，τ による因子の pull-back を表す）．

(*ii*)D_1 と $2\mathbb{L}$ が線形同値になる直線束が存在する．

このとき，以下の条件を満たす S_4-被覆 $\pi : X \to Y$ が存在する．(*i*) $D(X/Y, V_4) = Z$ かつ (*ii*) $\Delta(X/Z) = \mathrm{Supp}(D_1 + D_2 + D_3)$．

逆に S_4-被覆が与えられ，$D(X/Y, V_4)$ が非特異ならば Proposition1.1 の「逆」が成立する．(詳しくは [12] 参照)

Proposition 1.1 の証明のポイントは Lagrange による 4 次方程式の解法を代数多様体上の因子の言葉で書き下すという点である．なお，局所方程式にこだわった構成法は [14] に見られる．Proposition 1.1 の条件は，結構複雑で扱いづらそうにみえるが，例えば 6 次曲線に沿って分岐する S_4-被覆の研究（[12]）や §3 で述べる例の構成では有効である．

2 versal G-被覆と G の essential dimension

イントロダクションでは veral G-被覆の定義を与え，その存在も保証されていることものべた．然し乍ら，存在だけでは少し心許ない．というのは

(i) versal G-被覆は G に対し，複数個存在する（一意性の欠如）．この報告の主結果にあるとおり，S_4 でも 2 種類以上はある．

(ii) ν は有理写像なので具体的な被覆を考える際には扱いづらい．

等々の問題があるからである．versal G-被覆を G-被覆を構成する問題へ応用することを念頭において考察するとき，「なるべく次元の低いモデルをさがす」という道は一つの選択と考えられる．そこで，その最小次元を以下のように定義する．

Definition 2.1 有限群 G の essential dimension $\mathrm{ed}_k(G)$（k は多様体の定義体．ここでは $\mathbb{C}$），とは非負の整数

$$\mathrm{ed}_k(G) := \min\{\dim(X) \mid X \text{ は } k \text{ 上定義された versal } G\text{-被覆}\}$$

のことと定義する．

上記の定義は [1] にある Theorem 7.5 を基としている．Buhler と Reichstein の original な定義については [1] の §3 参照．以下 $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G)$ の性質について列挙する．証明については [1] を参照されたい．

Lemma 2.1

$$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 1 \Leftrightarrow G = \{1\}.$$

Lemma 2.2 (i) H が G の部分群ならば，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(H) \leq \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G)$.
(ii) $G = H_1 \times H_2 \Leftrightarrow \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G) \leq \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(H_1) + \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(H_2)$

G が可換群の場合はつぎの定理が成立する．

Theorem 2.1 G が可換群のとき，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G)$ はその階数（最小限必要な生成元の数）に等しい．

また，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 1$ となる G に関しては以下の結果がしられている．

Theorem 2.2 $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(G) = 1$ ならば，G は (i) 巡回群，または (ii) 位数 $2n$ （n は奇数）の 2 面体群 D_{2n} である．

上の versal D_{2n}-被覆は $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ の 2 面体被覆で $z \mapsto z^n + 1/z^n$ で与えられる．この被覆は [11] で本質的な役割を果たしている．対称群，及び交代群に対してはつぎの結果がある．

Theorem 2.3 S_n，A_n はそれぞれ n 次対称群，n 次交代群とする．

(*i*) $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_{n+2}) \geq \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_n) + 1$，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_n) \geq [n/2]$.
(*ii*) $n \geq 5$ ならば，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}} \leq n - 3$.
(*iii*) $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_4) = \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_5) = 2$，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_6) = 3$.
(*iv*) $n \geq 4$ ならば，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(A_{n+4}) \geq \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(A_n) + 2$，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(A_n) \geq 2[n/4]$.
(*v*) $\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(A_4) = \mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(A_5) = 2$.

上記の定理から，versal S_4-被覆で次元最小のものは 2 次元であることがわかる．以下の節では，§1 の手法の乗っ取って，2 次元のモデルを構成する．また，S_7 については上記の定理より，$\mathrm{ed}_{\mathbb{C}}(S_7)$ は 3 または 4 であることがわかるが，これがどちらになるかは未解決である（[1] のイントロダクション参照）．

3　2 つの S_4-cover S_{431} と S_{9111}

この節では楕円曲面に関するさまざまな結果を自在に援用する．くわしくは，[3]，[4]，[5]，[10] を参照のこと．

3.1　S_4-被覆 S_{431}

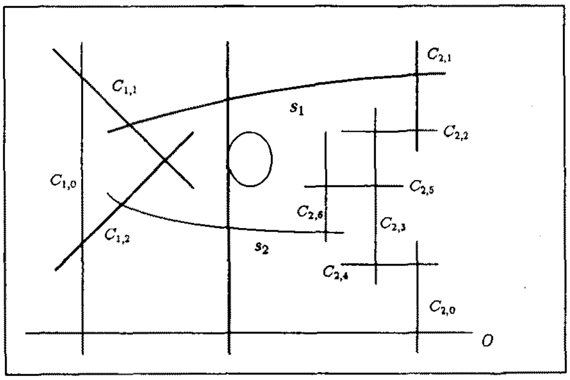
$\varphi : X_{431} \to \mathbb{P}^1$ はつぎの cubic pencil

$$\Lambda : \{\lambda_0(X_0X_1X_2) + \lambda_1(X_0 + X_1 + X_2)^3 = 0\}_{[\lambda_0,\lambda_1]\in\mathbb{P}^1},$$

ただし，X_0, X_1, X_2 は $\mathbb{P}^2$ の同次座標，の base points を取り除いて得られる有理楕円曲面とする．そのブローアップの写像を $q : X_{431} \to \mathbb{P}^2$ で表す．(X_{431} という記号は [5] に従っている．) $\varphi : X_{431} \to \mathbb{P}^1$ は以下の性質を満たすことが知られている（[5] 参照）:

- $\mathrm{MW}(X_{431}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．その元を O, s_1 and s_2 で表す．
- φ は 3 つの特異ファイバーをもちそれらのタイプは I_1, I_3 and IV^* である．

s_1 及び s_2 は X_{431} の各特異ファイバーと以下の図のように交わると仮定してよい．曲線 O, s_1, s_2, $C_{2,i}$ $(i = 0, 1, 2, 4, 5, 6)$ が q の例外集合である．



$\sigma_\varphi =$ 群演算に関して逆元をとるという自己同型

また,

$\tau_{s_i} = s_i$ による平行移動

とおく. 各 σ_φ, τ_{s_1} は X_{431} の fiber preserving な自己同型であり, $\sigma_\varphi^2 = \tau_{s_1}^3 = (\sigma_\varphi \tau_{s_1})^2 = 1$ を満たしている. 故に σ_φ と τ_{s_1} は X_{431} 上 S_3 の作用を与えている. この作用による商を $\Sigma_{431} = X_{431}/S_3$ とおき, その商写像を $f_{431} : X_{431} \to \Sigma_{431}$ で表す. φ の非特異なファイバー上では, この S_3 の作用は自然もの, すなわち, 楕円曲線上の位数 3 の元による平行移動と群の演算に関して逆元をとるというものである. 問題は特異ファイバー上での作用であるが, これに関しては以下の補題が成立する:

Lemma 3.1 特異ファイバー上の上記の S_3 の作用は以下の通りである:

I_1-ファイバー: σ_φ は τ_{s_1} ともにこのファイバー上で非自明な自己同型である. 通常 2 重点 P のまわりの局所座標系 (z_1, z_2) を適当にとれば以下のようになる:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &: (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1), \\ \tau_{s_1} &: (z_1, z_2) \mapsto (\omega z_1, \omega^2 z_2), \end{aligned}$$

ここで, $P := (0,0)$ 及び $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ である.

I_3-ファイバー:どの既約成分上でも, σ_φ, τ_{s_1} は恒等写像にならない. σ_φ^* 及び $\tau_{s_1}^*$ は各既約成分の間に下記のような置換を引き起こす.

$$\sigma_\varphi^* : \begin{array}{ccc} C_{1,0} & \mapsto & C_{1,0}, \\ C_{1,1} & \mapsto & C_{1,2}, \\ C_{1,2} & \mapsto & C_{1,1}, \end{array} \qquad \tau_{s_1}^* : \begin{array}{ccc} C_{1,0} & \mapsto & C_{1,2}, \\ C_{1,1} & \mapsto & C_{1,0}, \\ C_{1,2} & \mapsto & C_{1,1}. \end{array}$$

IV^*-fiber: $C_{2,4}$ は σ_φ がその上で恒等写像となるような唯一の既約成分である．また，τ_{s_1} はどの既約成分上でも恒等写像とはならない． σ_φ^* と $\tau_{s_1}^*$ 各既約成分を以下のように置換する：

$$\sigma_\varphi^* : \begin{array}{l} C_{2,1} \mapsto C_{2,6},\quad C_{2,2} \mapsto C_{2,5},\quad C_{2,3} \mapsto C_{2,3}, \\ C_{2,4} \mapsto C_{2,4},\quad C_{2,0} \mapsto C_{2,0}, \end{array}$$

$$\tau_{s_1}^* : \begin{array}{l} C_{2,0} \mapsto C_{2,6},\quad C_{2,1} \mapsto C_{2,0},\quad C_{2,2} \mapsto C_{2,4} \\ C_{2,3} \mapsto C_{2,3},\quad C_{2,4} \mapsto C_{2,5},\quad C_{2,5} \mapsto C_{2,2} \\ C_{2,6} \mapsto C_{2,1}. \end{array}$$

Proof. (i) の後半のみ証明する．P の固定群は S_3 になることに注意すれば，P の接空間への S_3 の表現は 2 次元の既約表現になる．これから主張が従う． 残りの主張については例えば §9, [3], §5, [6], and [9] を参照. □

s_1, s_2 への作用は $\sigma_\varphi^* s_1 (= s_1^{\sigma_\varphi}) = s_2$，$\tau_{s_1}^* s_1 (= s_1^{\tau_{s_1}}) = O$， $s_2^{\tau_{s_1}} = s_1$，$O^{\tau_{s_1}} = s_2$ となる．[10], Lemma 8.1 及び 8.2 からつぎの関係式を得る：

$$\begin{aligned} s_1 &\approx_{\mathbb{Q}} O + F - \frac{1}{3}(2C_{1,1} + C_{1,2}) \\ &\quad - \frac{1}{3}(4C_{2,1} + 5C_{2,2} + 6C_{2,3} + 3C_{2,4} + 4C_{2,5} + 2C_{2,6}), \\ s_2 &\approx_{\mathbb{Q}} O + F - \frac{1}{3}(C_{1,1} + 2C_{1,2}) \\ &\quad - \frac{1}{3}(4C_{2,6} + 5C_{2,5} + 3C_{2,4} + 6C_{2,3} + 4C_{2,2} + 2C_{2,1}), \end{aligned}$$

ただし， F はファイバー，$\approx_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-algebraic equivalence を表している． X_{431} は単連結であるから，algebraic equivalence は linear equivalence へ置き換えることができる. 従って，次の関係式を得る：

$$\begin{aligned} & s_1 + s_2 + C_{1,1} + C_{1,2} + C_{2,2} + C_{2,5} \\ \sim\ & 2(O + F - C_{2,1} - C_{2,2} - 2C_{2,3} - C_{2,4} - C_{2,5} - C_{2,6}), \end{aligned}$$

ここで，$\sim$ は linear equivalence を表している.

$$D = s_1 + s_2 + C_{1,1} + C_{1,2} + C_{2,2} + C_{2,5},$$

とおき，D_1，D_2，D_3 を

$$\begin{aligned} D_1 &= D^{\tau_{s_1}} \\ D_2 &= D^{\tau_{s_1}^2} \\ D_3 &= D. \end{aligned}$$

とさめると Propositions 1.1 より，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$-被覆で $g_{431} : S_{431} \to X_{431}$ 以下の 3 条件を満たすものが構成できることがわかる．

(*i*) $\pi_{431} = f_{431} \circ g_{431} : S_{431} \to \Sigma_{431}$ は S_4-被覆，

(*ii*) $D(S_{431}/\Sigma_{431}, V_4) = X_{431}$，かつ

(*iii*) $\Delta_{g_{431}} = \mathrm{Supp}(D_1 + D_2 + D_3)$.

3.2 S_4-被覆 S_{9111}

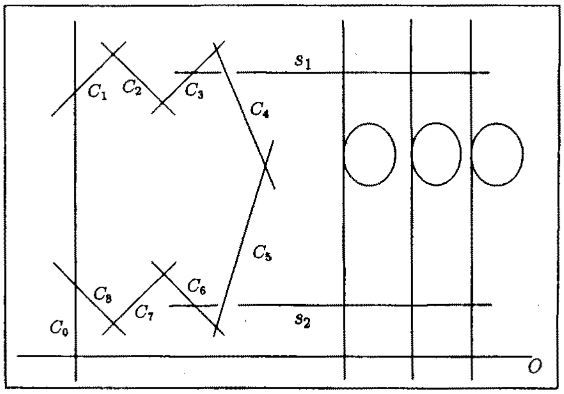
$([s_0, s_1], [t_0, t_1])$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の同次座標とし，次の pencil を考える：

$$\Lambda_1 : \{\lambda_0(s_0 s_1 t_0^2 + s_0^2 t_0 t_1 + s_1^2 t_1^2) + \lambda_1(s_0 s_1 t_0 t_1) = 0\}_{[\lambda_0:\lambda_1]\in\mathbb{P}^1}.$$

Λ_1 の固定点を解消すれば有理楕円曲面が得られる．[5]，に従いこの楕円曲面を $\varphi_1 : X_{9111} \to \mathbb{P}^1$ と表し，ブローアップの合成 $X_{9111} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を q_1 で表す．$\varphi_1 : X_{9111} \to \mathbb{P}^1$ は以下の性質を満たすことが知られている（[5] 参照):

- $\mathrm{MW}(X_{9111}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．この元を O, s_1 and s_2 と表す．
- φ は 4 つの特異ファイバーをもち，そのタイプは I_9, I_1, I_1, I_1 である．

この 4 つの特異ファイバーと s_1 and s_2 は X_{9111} で以下の図のように交わっているものとする． 曲線 $O, s_1, s_2, C_0, C_2, C_3, C_6, C_7$ が q_1 の例外集合になっている．



(Figure 2)

X_{431} の時同様，σ_{φ_1} と τ_{s_1} により，自然な S_3 の作用が得られる．この作用による商を $\Sigma_{9111} := X_{9111}/S_3$ とおき，その商写像を $f_{9111} : X_{9111} \to \Sigma_{9111}$ とおく．その各特異ファイバーでの作用は以下の通りである：

Lemma 3.2 *(i)* I_1-ファイバー上では *Lemma 3.1* と同様.
(ii) I_9-ファイバー上ではつぎの通り：

$$\begin{array}{rcll} \sigma^*_{\varphi_1}: & C_i & \to & C_{9-i(\mathrm{mod} 9)}, \\ \tau^*_{s_1}: & C_i & \to & C_{i-3(\mathrm{mod} 9)}. \end{array}$$

また，

$$\begin{array}{l} s_1^{\sigma_{\varphi_1}} = s_2, \quad O^{\sigma_{\varphi_1}} = O, \\ s_1^{\tau_{s_1}} = O, \quad s_2^{\tau_{s_1}} = s_1, \quad O^{\tau_{s_1}} = s_2. \end{array}$$

となる．Lemma 3.2 の主張については，例えば，§9, [3], §5, [6], and [9] を参照のこと．再び，[10] Lemmas 8.1 and 8.2 から，

$$s_1 \approx_{\mathbb{Q}} O + F - \frac{1}{3}(2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + 5C_4 + 4C_5 + 3C_6 + 2C_7 + C_8),$$

かつ，

$$s_2 \approx_{\mathbb{Q}} O + F - \frac{1}{3}(C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + 4C_7 + 2C_8),$$

ただし，F はファイバー，$\approx_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-algebraic equivalence を表す．すると，X_{9111} は単連結なので，$\mathbb{Q}$-algebraic equivalence は $\mathbb{Q}$-linear equivalence と取り替えることができる．故に，

$$\begin{array}{rl} & s_1 + s_2 + C_1 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_8 \\ \sim & 2(O + F - C_2 - C_3 - C_4 - C_5 - C_6 - C_7). \end{array}$$

ここで

$$D = s_1 + s_2 + C_1 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_8,$$

とおき，D_1，D_2，D_3 を下記のように定義する：

$$D_1 = D^{\tau_{s_1}}, \quad D_2 = D^{\tau^2_{s_1}}, \quad D_3 = D.$$

すると，Proposition 1.1，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$-被覆 $g_{9111}: S_{9111} \to X_{9111}$ でつぎの 3 条件を満たすものが存在することがわかる．

(*i*) $\pi_{9111} = f_{9111} \circ g_{9111}: S_{9111} \to \Sigma_{9111}$ は S_4-被覆，

(*ii*) $D(S_{9111}/\Sigma_{9111}, V_4) = X_{9111}$，かつ

(*iii*) $\Delta g_{9111} = \mathrm{Supp}(D_1 + D_2 + D_3)$．

このようにして構成した $\pi_{431}: S_{431} \to \Sigma_{431}$ 及び $\pi_{9111}: S_{9111} \to \Sigma_{9111}$ はともに versal S_4-被覆となる．この事実の証明については [13] を参照されたい．

References

[1] J. Buhler and Z. Reichstein: *On the essential dimesion of a finite group*, Comp. Math. **106** (1997), 159-179.

[2] C. U. Jensen, A. Ledet and N. Yui: Generic polynomials, Cambridge University Press 2002 October

[3] K. Kodaira: On compact analytic surfaces II-III, Ann. of Math., **77** (1963), 563 – 626, **78** (1963), 1 – 40.

[4] R. Miranda: *The Basic Theory of Elliptic surfaces*, Dottorato di Ricerca in Mathematica, Dipartmento di Mathematica dell'Universiá di Pisa, (1989).

[5] R. Miranda and U. Persson: *On extremal rational elliptic surfaces*, Math. Z. **193**, 537-558 (1986).

[6] R. Miranda and U. Persson: *Configuration of I_n Fibers on Elliptic $K3$ Surfaces*, Math. Z. **201**, 339-361 (1989).

[7] M. Namba: *On finite Galois Coverings of projective manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **41**, 391-403.

[8] M. Namba: *Finite branched coverings of complex manifold*, Sugaku Expositions **5** (1992) 193-211.

[9] U. Persson: *Double sextics and singular K-3 surfaces*, Springer Lecture Notes in Math. **1124**, 262-328, Berlin, Heidelberg: Springer 1985.

[10] T. Shioda: *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211-240.

[11] H. Tokunaga: *On dihedral Galois coverings*, Canadian J. of Math., **46** (1994), 1299-1317.

[12] H. Tokunaga: *Galois covers for $\mathfrak{S}_4$ and $\mathfrak{A}_4$ and their applications*, to appear in Osaka J. Math.

[13] H. Tokunaga: *2-dimensional versal S_4-covers and rational elliptic surfaces*, preprint 2002.

[14] H. Tsuchihashi: *Galois covering singularities II*, Osaka J. Math. **36** (1999), 615-639.

[15] H. Tsuchihashi: *Galois coverings of projective varieties for the dihedral groups and the symmetric groups*, preprint 2001.